

**ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КРЕПИ  
ПОДЗЕМНЫХ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ**

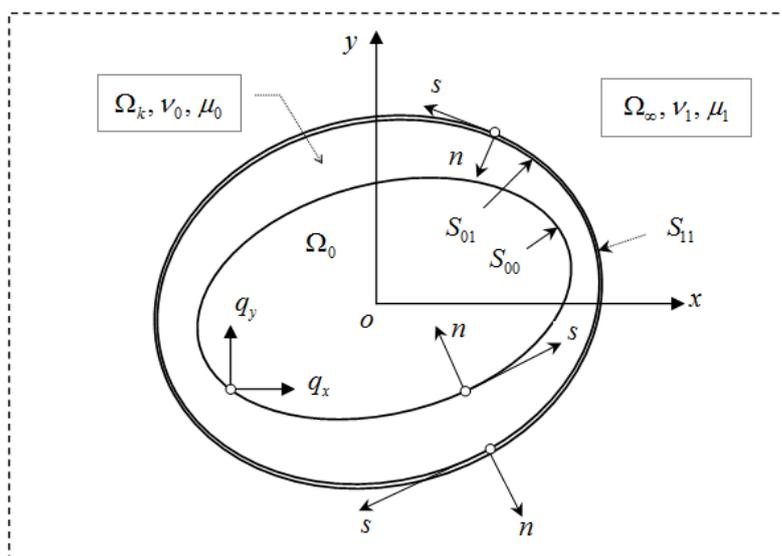
*Низомов Д.Н. д.т.н., профессор, член-корр. АН РТ, заведующий лабораторией института геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии (ИГССС) АН РТ; Ходжибоев А.А. д.т.н., ТГУ им. акад. М.С. Осими; Икромов И.И. к.т.н., ТАУ им. Ш. Шотемур; Ходжибоев О.А. СНС ИГССС АН РТ*

**Ключевые слова:** неограниченное тело, контактная граница, крепь, граничный элемент, граничные уравнения, подземное сооружение.

Рассмотрим бесконечную область  $\Omega_\infty + \Gamma_\infty$  с отверстием в условиях плоской деформации, которая находится под действием заданных начальных напряжений  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ . Пусть отверстие подкреплено упругим кольцом, впаянным в контур отверстия  $S_{11}$ . Упругое кольцо с контурами  $S_{00}$  и  $S_{01}$  имеет упругие постоянные  $\nu_0$  и  $\mu_0$ . Внешний контур кольца  $S_{01}$  полностью совпадает с контуром отверстия  $S_{11}$  (рис.1). На контуре  $S_{01} = S_{11}$  выполняются граничные условия:

$$\sigma_n^{01} = \sigma_n, \quad \tau_{ns}^{01} = \tau_{ns}, \quad u_n^{01} = -u_n, \quad u_s^{01} = -u_s, \quad (1)$$

где верхним индексом обозначены напряжения и перемещения на впаянном контуре упругого кольца  $S_{01}$  с коэффициентом Пуассона  $\nu_0$  и модулем сдвига  $\mu_0$ ;  $\sigma_n, \tau_{ns}, u_n, u_s$  - напряжения и перемещения на контуре отверстия  $S_{11}$  неограниченного тела.



**Рис. 1.** Бесконечная область с подкрепленным отверстием

Следуя работе [1], назовем напряженное состояние в области  $\Omega_\infty$  - без отверстия – начальным, а состояние, соответствующее наличию отверстия – дополнительным. Новое напряженное состояние в этой же области, но ослабленной, каким либо отверстием, можно представить в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \bar{\sigma}_x, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \bar{\sigma}_y, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \bar{\tau}_{xy}, \quad (2)$$

где  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  - компоненты напряжений в начальном (без отверстия) состоянии;  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$  - компоненты напряжения в дополнительном состоянии. Поверхностные напряжения на контурах  $S_{00}$  и  $S_{01}$  в начальном состоянии выражаются так:

$$p_x^0 = \sigma_x^0 \cos \alpha_1 + \tau_{xy}^0 \sin \alpha_1; \quad p_y^0 = \sigma_y^0 \sin \alpha_1 + \tau_{xy}^0 \cos \alpha_1, \quad (3)$$

где  $\alpha_1$  - угол между осью  $x$  и нормали к поверхности  $S_{00}$  и  $S_{01}$ . На контуре спая  $S_{01}$ , согласно условиям сопряжения (2), компоненты поверхностных напряжений записываются в виде

$$P_x = p_x^0 + \bar{P}_x, \quad P_y = p_y^0 + \bar{P}_y, \quad (4)$$

где  $\bar{P}_x, \bar{P}_y$  - искомые напряжения, соответствующие дополнительному состоянию;  $p_x^0, p_y^0$  - заданные напряжения (3). На контуре отверстия  $S_{00}$ , при заданной нагрузке в виде внутреннего давления с компонентами  $q_x, q_y$ , поверхностные напряжения согласно (2) будут равны:

$$\bar{p}_x + p_x^0 = q_x, \quad \bar{p}_y + p_y^0 = q_y. \quad (5)$$

Откуда следует, что в дополнительном состоянии поверхностные напряжения на контуре отверстия можно представить в виде

$$\bar{p}_x = q_x - p_x^0; \quad \bar{p}_y = q_y - p_y^0. \quad (6)$$

В случае совместного действия гидростатического давления на поверхность  $S_{00}$  и начального напряженного состояния, компоненты векторов в (3) вычисляются по следующим формулам

$$p_x^0 = (p + \sigma_x^0) \cos \alpha_1 + \tau_{xy}^0 \sin \alpha_1, \\ p_y^0 = (p + \sigma_y^0) \cos \alpha_1 + \tau_{xy}^0 \sin \alpha_1,$$

где  $p$  – интенсивность внутреннего давления на поверхности  $S_{00}$ .

Граничные интегральные уравнения, соответствующие дополнительному состоянию, представляются в виде [2]:

а) для упругого кольца

$$\psi_{ij} \bar{w}_j(\xi) + \int_S p_{ij}^*(\xi, x) \bar{w}_j(x) ds = \int_S w_{ij}^*(\xi, x) \bar{p}_j(x) ds, \quad (7) \\ S = S_{00} + S_{01}, \quad i, j = 1, 2;$$

б) для контура отверстия  $S_{11}$

$$\psi_{ij} \bar{w}_j(\xi) + \int_{S_{11}} p_{ij}^*(\xi, x) \bar{w}_j(x) ds = \int_{S_{11}} w_{ij}^*(\xi, x) \bar{p}_j(x) ds. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) с учетом (4) представим в следующем виде

$$\psi_{ij} \bar{w}_j(\xi) + \int_S p_{ij}^*(\xi, x) \bar{w}_j(x) ds - \int_{S_{01}} w_{ij}^*(\xi, x) \bar{p}_j(x) ds = \\ = \int_{S_{00}} w_{ij}^*(\xi, x) (q_i - p_j^0) ds - \int_{S_{01}} w_{ij}^*(\xi, x) p_j^0(x) ds, \quad (9)$$

$$\psi_{ij} \bar{w}_j(\xi) + \int_{S_{11}} p_{ij}^*(\xi, x) \bar{w}_j(x) ds - \int_{S_{11}} w_{ij}^*(\xi, x) \bar{p}_j(x) ds = \int_{S_{11}} w_{ij}^*(\xi, x) p_j^0(x) ds, \quad (10)$$

$$\psi_{ij}(\xi) = \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) ds(x)$$

где  $p_i(x)$  – компоненты напряжений на контактной границе  $S_{01} = S_{11}$ ,  $\bar{w}_j(x)$  – компоненты перемещения на контуре  $S = S_{00} + S_{01}$  в дополнительном состоянии. Если предположить, что в начальном состоянии перемещения в области  $\Omega_\infty$  равняются нулю, то окончательные значения перемещений будут равны перемещениям дополнительного состояния

$$w_i(x) = \bar{w}_i(x). \quad (11)$$

Разбивая контуры  $S_{00}$  и  $S_{01}$  соответственно на  $N_{00}$  и  $N_{01}$  граничных элементов нулевого порядка из (9) и (10), получаем системы алгебраических уравнений, которые после замены  $w_1$  на  $u_x$ ,  $w_2$  на  $u_y$  представляются так:

а) для упругого кольца

$$\sum_{N_0} a_{ij}^* \bar{u}_{xj} + \sum_{N_0} b_{ij}^* \bar{u}_{yj} - \sum_{N_{01}} e_{ij} \bar{p}_{xj} - \sum_{N_{01}} f_{ij} \bar{p}_{yj} = - \sum_{N_0} e_{ij} p_{xj}^0 - \sum_{N_0} f_{ij} p_{yj}^0 + \sum_{N_{00}} e_{ij} q_{xj} + \sum_{N_{00}} f_{ij} q_{yj}, \\ \sum_{N_0} c_{ij} \bar{u}_{xj} + \sum_{N_0} d_{ij}^* \bar{u}_{yj} - \sum_{N_{01}} g_{ij} \bar{p}_{xj} - \sum_{N_{01}} h_{ij} \bar{p}_{yj} = - \sum_{N_0} g_{ij} p_{xj}^0 - \sum_{N_0} h_{ij} p_{yj}^0 + \sum_{N_{00}} g_{ij} q_{xj} + \sum_{N_{00}} h_{ij} q_{yj}, \quad (12)$$

$$N_0 = N_{00} + N_{01}, \quad i = 1, 2, \dots, N_0,$$

б) для контура отверстия в бесконечной области

$$\sum_{N_{01}} \tilde{a}_{ij}^* \bar{u}_{xj} + \sum_{N_{01}} \tilde{b}_{ij}^* \bar{u}_{yj} - \sum_{N_{01}} \tilde{e}_{ij} \bar{p}_{xj} - \sum_{N_{01}} \tilde{f}_{ij} \bar{p}_{yj} = - \sum_{N_{01}} \tilde{e}_{ij} p_{xj}^0 - \sum_{N_{01}} \tilde{f}_{ij} p_{yj}^0, \\ \sum_{N_{01}} \tilde{c}_{ij} \bar{u}_{xj} + \sum_{N_{01}} \tilde{d}_{ij}^* \bar{u}_{yj} - \sum_{N_{01}} \tilde{g}_{ij} \bar{p}_{xj} - \sum_{N_{01}} \tilde{h}_{ij} \bar{p}_{yj} = - \sum_{N_{01}} \tilde{g}_{ij} p_{xj}^0 - \sum_{N_{01}} \tilde{h}_{ij} p_{yj}^0. \quad (13)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_0.$$

Системы уравнений (12) и (13) можно представить в матричной форме

$$\begin{bmatrix} A & B & -E & -F \\ C & D & -G & -H \\ \tilde{A} & \tilde{B} & \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{C} & \tilde{D} & \tilde{G} & \tilde{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_x \\ \bar{U}_y \\ \bar{P}_x \\ \bar{P}_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \\ \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{G} & \tilde{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_x^0 \\ P_y^0 \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

где  $A, B, C, D$  - квадратные матрицы порядка  $N_0 = N_{00} + N_{01}$ , где  $N_{00}$  - число элементов на поверхности  $S_{00}$ ,  $N_{01}$  - число постоянных элементов на поверхности  $S_{01}$ ;  $E, F, G, H$  - прямоугольные матрицы размера  $N_0 \times N_{01}$ ;  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$  - квадратные матрицы порядка  $N_{11}$ , где  $N_{11} = N_{01}$  - число элементов на поверхности  $S_{11}$ ;  $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{H}$  - квадратные матрицы порядка  $N_{11}$ . Искомые векторы перемещения  $\bar{U}_x, \bar{U}_y$  и векторы поверхностных напряжений  $\bar{P}_x, \bar{P}_y$  на контактной границе между контурами  $S_{01}$  и  $S_{11}$  имеют соответственно  $N_0$  и  $N_{11}$  элементов. Блочная матрица коэффициентов в системе уравнений (14) имеет порядок  $M = 2N_0 + 4N_{01}$ . Вектор свободных членов в (14) формируется с использованием (3) и (6). Из решения (14) мы получаем векторы перемещений и контактных напряжений, соответствующие дополнительному состоянию. Затем определяется тангенциальные и нормальные перемещения и напряжения на контурах  $S_{00}$ ,  $S_{01}$  и  $S_{11}$ , соответствующие окончательному состоянию.

Тангенциальные напряжения на контуре  $S_{00}$ ,  $S_{01}$  и  $S_{11}$  в дополнительном состоянии определяются из следующих зависимостей

$$\bar{\sigma}_s = (2G_0\bar{\varepsilon}_s + \nu\bar{\sigma}_n) / (1-\nu), \quad (15)$$

$$\text{где} \quad \bar{\sigma}_n = -\sigma_n^0 + q_n = -\sigma_x^0 \cos^2 \alpha_1 - \sigma_y^0 \sin^2 \alpha_1 - 2\tau_{xy}^0 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 + q_n.$$

Полные значения тангенциальных напряжений на контуре  $S_{00}$  записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_s = \bar{\sigma}_s + \sigma_s^0 = \frac{1}{1-\nu} [2G_0\bar{\varepsilon}_s - \nu(\sigma_x^0 \cos \alpha_1 + \sigma_y^0 \sin^2 \alpha_1 + 2\tau_{xy}^0 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 - q_n)] + \\ + \sigma_x^0 \sin^2 \alpha_1 + \sigma_y^0 \cos^2 \alpha_1 - 2\tau_{xy}^0 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Полные значения нормальных напряжений на контуре  $S_{00}$

$$\sigma_n = \bar{\sigma}_n + \sigma_n^0 = q_n, \quad q_n = -p.$$

Компоненты напряжений на внешнем контуре кольца, где действуют контактные напряжения  $\bar{p}_x, \bar{p}_y$ , выражаются следующими формулами

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_n = \bar{p}_x \cos \alpha_1 + \bar{p}_y \sin \alpha_1, \quad \bar{\tau}_n = \bar{p}_x \sin \alpha_1 - \bar{p}_y \cos \alpha_1, \\ \bar{\sigma}_s = \bar{p}_x \cos(\alpha_1 + \pi/2) + \bar{p}_y \sin(\alpha_1 + \pi/2) = -\bar{p}_x \sin \alpha_1 + \bar{p}_y \cos \alpha_1, \end{aligned}$$

где  $\bar{p}_x, \bar{p}_y$  - поверхностные напряжения, найденные из решения (14). На контуре сая полные тангенциальные, нормальные и касательные напряжения будут равны

$$\begin{aligned} \sigma_s = \bar{\sigma}_s + \sigma_s^0 = (2G_0\bar{\varepsilon}_s + \nu\bar{\sigma}_n) / (1-\nu) + \sigma_s^0 = \\ = [2G_0\bar{\varepsilon}_s + \nu(\bar{p}_x \cos \alpha_1 + \bar{p}_y \sin \alpha_1)] / (1-\nu) + \sigma_x^0 \sin^2 \alpha_1 + \sigma_y^0 \cos^2 \alpha_1 - 2\tau_{xy}^0 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\sigma_n = \bar{\sigma}_n + \sigma_n^0 = \bar{p}_x \cos \alpha_1 + \bar{p}_y \sin \alpha_1 + \sigma_x^0 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_y^0 \sin^2 \alpha_1 - 2\tau_{xy}^0 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1, \quad (18)$$

$$\tau_{ns} = \bar{\tau}_n + \tau_{ns}^0 = \bar{p}_x \sin \alpha_1 - \bar{p}_y \cos \alpha_1 + (\sigma_y^0 - \sigma_x^0) \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \tau_{xy}^0 (\cos^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_1).$$

Значения полных тангенциальных и нормальных напряжений на контуре  $S_{11}$  определяются по (17) и (18). Так как модуль сдвига бесконечной области отличается от модуля сдвига кольца, то функция  $\sigma_s$  будет претерпевать разрыв при переходе от внешнего контура кольца  $S_{01}$  к контуру отверстия  $S_{11}$ .

В качестве тестовой рассмотрим задачу взаимодействия с массивом пород крепи горизонтальной выработки круглого сечения, находящейся на глубине  $h \ll b$  под действием равномерного внутреннего давления  $q_n = -p$  (рис. 2). В табл. 1 представлены результаты численного решения при различных

разбиениях контуров  $S_{00}$ ,  $S_{01}$  и  $S_{11}$  при  $\nu_0 = \nu_1 = 0.25$ ,  $b/a = 2$ ,  $G_0/G_1 = 2$ . Как следует из результатов численного эксперимента, с увеличением числа элементов значения тангенциальных и нормальных напряжений приближаются к аналитическому решению [3].

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \xi[(pa^2/b^2 - p') + (p - p')a^2/r^2], \quad \xi = 1/(1 - a^2/b^2) \\ \sigma_n &= \xi[(pa^2/b^2 - p') - (p - p')a^2/r^2], \quad a \leq r \leq b, \\ \sigma_n &= -p'b^2/r^2, \quad \sigma_s = -p'b^2/r^2, \quad r \geq b, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$p' = \frac{2(1 - \nu_0)pa^2/b^2}{2(1 - \nu_1) + (G_0/G_1 - 1)(1 - a^2/b^2)}$$

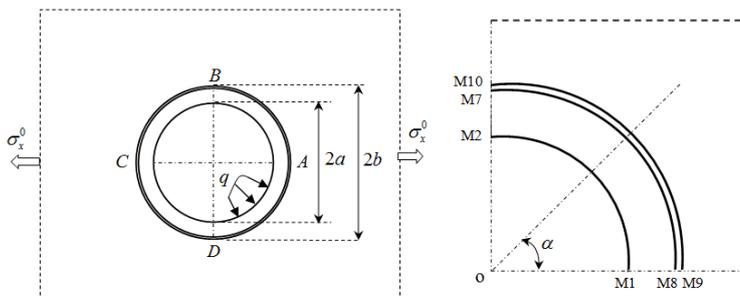


Рис. 2. Пластика, ослабленная круговым отверстием с впаянным упругим кольцом.

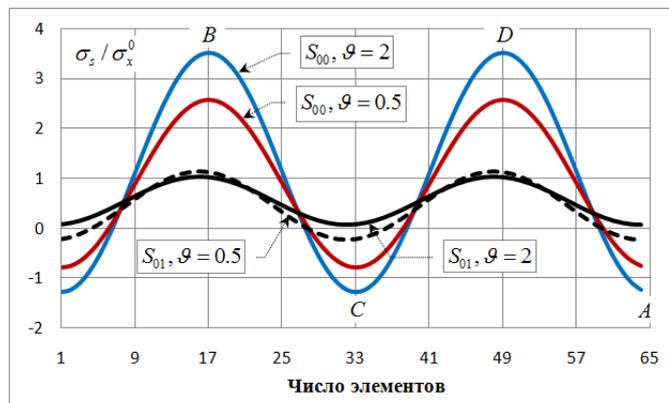
Таблица 1. - Радиальные и тангенциальные напряжения на контурах кольца и пластине

Разбиение	$\sigma_s / p$			$\sigma_n / p$		
	$S_{00}$	$S_{01}$	$S_{11}$	$S_{00}$	$S_{01}$	$S_{11}$
16×16×16	1.3021	0.4051	0.1750	-1.00	-0.1654	-0.1654
32×32×32	1.2492	0.3934	0.1690	-1.00	-0.1660	-0.1660
64×64×64	1.2325	0.3903	0.1674	-1.00	-0.1664	-0.1664
(19)	1.2222	0.3888	0.1666	-1.00	-0.1666	-0.1666

Получены результаты численного решения тестовой задачи (рис. 2) от действия растягивающих напряжений  $\sigma_x^0$ , приложенных в бесконечности. В табл. 2 результаты при  $b/a = 2$ ,  $G_0/G_1 = 1$ ,  $\nu_0 = \nu_1 = 0,25$  сопоставляются с аналитическим решением задачи Кирша [4]. Погрешность при разбивке четверти контура на 16 элементов составляет от 0,5% до 1%. На рис. 3 показано распределение тангенциальных напряжений на контурах крепи при различных значениях  $\mathcal{G} = G_0/G_1$ , откуда следует, что с уменьшением жесткости кольца концентрация напряжений на внутренней поверхности уменьшается, а на внешней поверхности напротив - увеличивается. При чистом сдвиге ( $\sigma_x^0 = 1$ ,  $\sigma_y^0 = -1$ ) наибольшие напряжения  $\sigma_s = \mp 4,799$  возникают в узлах M1 и M2 соответственно.

Таблица 2. - Тангенциальные перемещения и касательные напряжения

Разбиение	$u_n$		$u_s$	$\sigma_s$	
	M1	M2	M12	M1	M2
16×16×16	-0.7205	0.2066	-0.4748	-0.9474	3.0112
32×32×32	-0.7346	0.2293	-0.4847	-0.9621	2.9827
64×64×64	-0.7422	0.2400	-0.4917	-0.9775	2.9851
Задача Кирша	-0.75	0.25	-0.50	-1.00	3.00



**Рис.3.** Распределение тангенциальных напряжений на контурах кольца.

Из полученных результатов следует, что с увеличением числа разбиений имеет место хорошая сходимость и сравнение с результатами аналитического решения показывает хорошую точность численного решения. При одноосном растяжении в бесконечности максимальное тангенциальное напряжение возникает на внутренней поверхности кольца. При чистом сдвиге концентрация напряжений значительно возрастает по сравнению с другими воздействиями.

Таким образом, на основе полученных результатов численного эксперимента можно сделать вывод, что реализованный алгоритм метода граничных уравнений применительно к неоднородной области имеет хорошую сходимость и достаточную точность. Предлагаемая математическая модель может быть использована для решения практических задач по расчету обделок подземных сооружений произвольного очертания.

#### Литература

1. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий - Киев, Наукова думка, 1968. - 888 с.
2. Низомов Д.Н. Метод граничных уравнений в решении статических и динамических задач строительной механики – М.: АСВ, 2000. - 282 с.
3. Крауч С., Старфилд. Методы граничных элементов в механике твердого тела – М.: Мир, 1987. - 328 с.
4. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости – М.: Наука, 1966. - 707 с.

#### АННОТАЦИЯ

#### ТАДҚИҚИ ҲОЛАТИ ШИДДАТНОҚЎ-ТАҒЙИРЁБАНДАГИИ КРЕПИ ИНШООТИ ГИДРОТЕХНИКИИ ЗЕРИЗАМИНӢ

Ба воситаи методи муодилаҳои интегралӣ канорӣ концентратсияи шиддатҳо дар масъалаи ҳамтаъсирии қреп бо массиви ҷинсҳои кӯҳӣ аз таъсири гуногун тадқиқот намуда мешавад.

#### ANNOTATION

#### INVESTIGATION OF STRESS-STRAIN STATE OF SUPPORT OF UNDERGROUND HYDRAULIC STRUCTURES

The stress concentration in the problem of interaction of the support with the rock mass under various influences is investigated by the method of boundary integral equations.

**Keywords:** unlimited body, contact boundary, support, boundary element, boundary equations, underground construction.